Trigonometrische
Kurven / Funktionen

Teil 1

Eigenschaften der Funktionen sin x, cos x und tan x
Verschiebung und Streckung von Sinuskurven

Kurvendiskussion ohne Verwendung der Differenzialrechnung

Geeignet ab Klasse 9 / 10.

Die gezeigten Methoden werden zum Abitur vorausgesetzt!

Datei Nr. 16140

Stand: 14. Februar 2014

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort und Hinweis auf den *Inhalt* und *Zusatztexte*

Der Inhalt dieses Textes ist für Klasse 9/10 sowie für Abiturienten Pflicht- und meist auch Prüfungsstoff. Es geht darum, die Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktionen ihren Gleichungen zu entnehmen. Im Unterricht nehmen sich Lehrer in der Regel dazu wenig Zeit und erklären an wenigen Beispielen, wie die Methoden dazu aussehen.

Aber die Praxis zeigt, dass man doch sehr viele Übungen und Beispiele benötigt.
Daher schreibe ich diesen Text und den Folgetext **16141 mit einer Aufgabensammlung** und sehr ausführlichen Musterlösungen.

Bei nicht zu komplizierten Sinus- und Kosinuskurven kann man wichtige Kurveneigenschaften ganz schnell erkennen, wenn man gelernt hat, der Kurvengleichung anzusehen, dass sie aus einer der Grundkurven $y = \sin x$ bzw. $y = \cos x$ durch eine „Abbildung“ entstanden ist.

Solche Abbildungen sind Verschiebungen, Achsenspiegelungen, Streckungen.

In diesem Text lernt man vor allem, mit welch einfachen Mitteln man dies durchführen kann.

Es gibt seit Januar 2014 einen Text, der kompakt zeigt, wie man mit Abbildungsgleichungen die Koordinaten eines abgebildeten Punktes und auch die Gleichung einer verschobenen und/oder gestreckten Kurve berechnen kann. Dieser Text hat die Nummer 21100.

Mit diesem Wissen kann man dann auch umgekehrt Kurvengleichungen analysieren und so angeben, welche Abbildungen „am Werk“ waren.

In vorliegendem Text wird ***ohne Abbildungsgleichungen*** gearbeitet.
Man soll möglichst rasch die Methoden lernen, die zur Analyse von Kurvengleichungen benötigt werden. Es ist also ein praxisorientierter Trainingstext.

Die Fortsetzung des vorliegenden Textes, also Teil 2, hat die Nummer 16141 und enthält sehr viele Übungsaufgaben.

Hinweis zur Schreibweise:

Man kann $\cos x$ oder auch $\cos(x)$ schreiben, oder ebenso $\sin x$ oder $\sin(x)$.
Das, worauf sich der Sinus oder Kosinus bezieht, nennt man das **Argument**.

Die traditionelle deutsche Schreibweise verwendet für Argumente nur dann Klammern, wenn es ein Term ist, der eine Summe oder Produkt ist, also $\sin(2x-1)$.

Die neuen Grafik- oder CAS-Rechner verwenden die internationale Notation, und die sieht stets eine Klammer vor.

Ich verwende beide Schreibweisen, also $\sin x$ und $\sin(x)$.

Inhalt

1 Zusammenfassung der Grundlagen aus 16001 und 16002 4

2 Symmetrie, Nullstellen und Extrempunkte 7

2.1 Die Kurve $y = \sin(x)$ / Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ 7

2.2 Die Kurve $y = \cos(x)$ / Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ 9

2.3 Die Kurve $y = \tan(x)$ / Die Funktion $f(x) = \tan(x)$ 10

3 Abbildung der Kurven $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ 11

3.1 Streckung in y-Richtung 11

3.2 Streckung in x-Richtung 11

3.3 Streckung in beiden Richtungen 12

3.4 Spiegelung an der x-Achse 13

3.5 Spiegelung an der y-Achse 14

3.6 Verschiebungen 15

3.7 Verschiebungen und Streckungen verkettet 18

4 Strategien zur Kurvendiskussion 20

Beispiel 1 $f(x) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 0{,}5$ 20

Beispiel 2 $f(x) = 3 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x) - 2$ 21

Beispiel 3 $f(x) = \sin(2x - \frac{1}{2}\pi) - 1$ 22

Beispiel 4 $f(x) = -2\cos(\frac{1}{2}x) + 1$ 23

5 Die Funktionen $f(x) = \sin^2 x$ und $f(x) = \cos^2 x$ 24

5.1 Umrechnung $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$ 24

5.2 Umrechnung $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}$ 24

5.3 Erzeugung von $y = \sin^2 x$ durch Abbildungen 25

5.4 Erzeugung von $y = \cos^2 x$ durch Abbildungen 26

1 Zusammenfassung der Grundlagen

Ausführlich nachzulesen in den Texten 16001 und 16002

Trigonometrie ist für Schüler in erster Linie ein Geometriebereich, in dem man mit Sinus, Kosinus und Tangens fehlende Stücke von Dreiecken berechnen kann.

Dazu lernt man, dass im rechtwinkligen Dreieck diese Beziehungen gelten:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Diese drei Funktionen besitzen einige Werte, die man gelernt haben sollte

WISSEN!

Gradmaß	*Bogenmaß*	*sin x*	*cos x*	*tan x*
$x = 0^o$	$x = 0$	0	1	0
$x = 30^o$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$x = 45^o$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$x = 60^o$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$x = 90^o$	$x = \frac{\pi}{2}$	1	0	---

Die Tabelle enthält außerdem noch die Winkel im **Bogenmaß**.

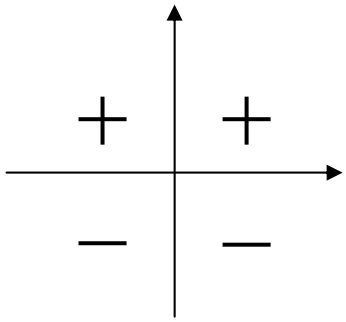
Dieses Winkelmaß verwendet die Länge des zu α gehörenden Kreisbogens mit dem Radius 1.

Dazu gibt es eine einfache Formel: $b = \frac{\alpha}{360^o} \cdot 2\pi r$. Diese berechnet den Bogen des Kreises als Bruchteil des Kreisumfangs. Für r = 1 folgt nach Kürzen: $x = \frac{\alpha}{180^o} \cdot \pi$.

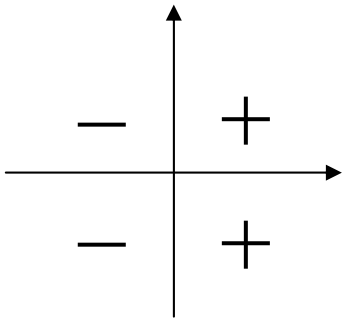
Für das Bogenmaß verwendet man gerne den Buchstaben x.

Für Sinus, Kosinus und Tangens als Funktionen verwendet man in der Regel das Bogenmaß.

Die Zusammenhänge mit den Sinus- und Kosinuswerten zu Winkel größer als 90° bzw. im Bogenmaß über $\frac{1}{2}\pi$ werden **in den Texten 16002** ausführlich und **in 16012 (Grundlagentraining)** kompakt dargestellt. Dabei ist es vor allem wichtig zu wissen, welche Vorzeichen die Werte in bestimmten Intervallen haben.

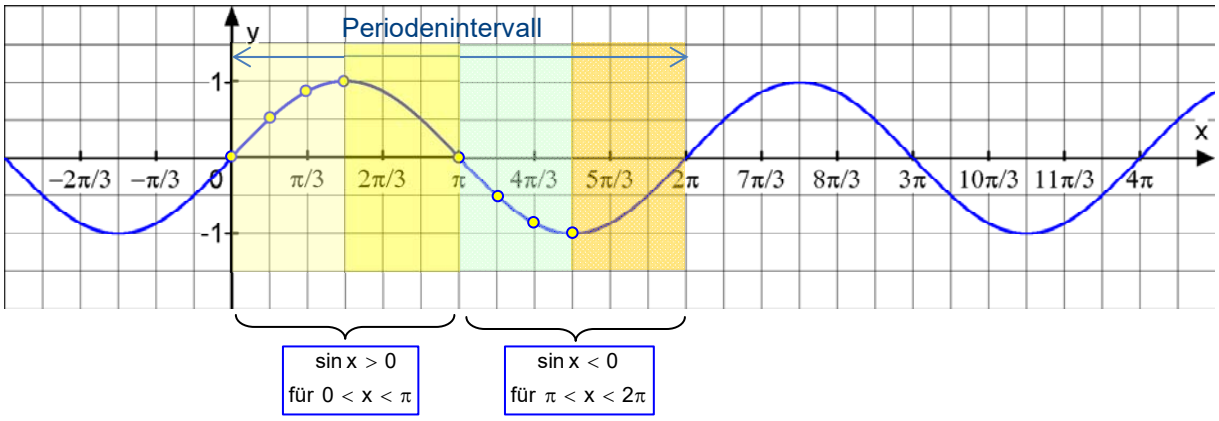


sin α



cos α

Die graphische Darstellung der Funktion $\boxed{f(x) = \sin x}$ übernehme ich aus 16012 / Seite 27:
Sie macht auch deutlich, dass es sich um eine periodische Funktion handelt: Die Werte des Intervalls $[0\,;2\pi]$ wiederholen sich regelmäßig, was man periodisch nennt. Die Periodenlänge ist 2π.



Für das schnelle Zeichnen einer Sinuskurve verwendet man folgende Tabelle:

cm	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Grad	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
sin x	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-0,5	0

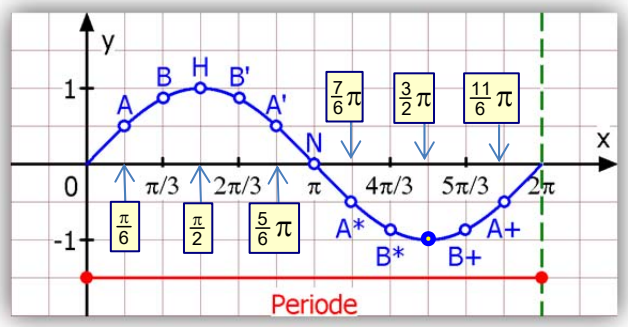
So zeichnet man eine Sinuswelle:

Man wählt den „Startpunkt“ im Ursprung.

Dann geht man 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{6}\pi$ bzw. 30°)
und um 0,5 nach oben (A).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{3}\pi$ bzw. 60°)
und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach oben (B).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{2}\pi$ bzw.90°)
und um 1 nach oben (Hochpunkt H).



Ab jetzt wiederholen sich die Werte wie folgt:

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{2}{3}\pi$ bzw. 120°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach oben (B‘).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{5}{6}\pi$ bzw. 150°) und um 0,5 nach oben (A‘).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts (π bzw.180°) und um 0 nach oben (Nullstelle N).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{7}{6}\pi$ bzw. 210°) und um 0,5 nach unten (A*).

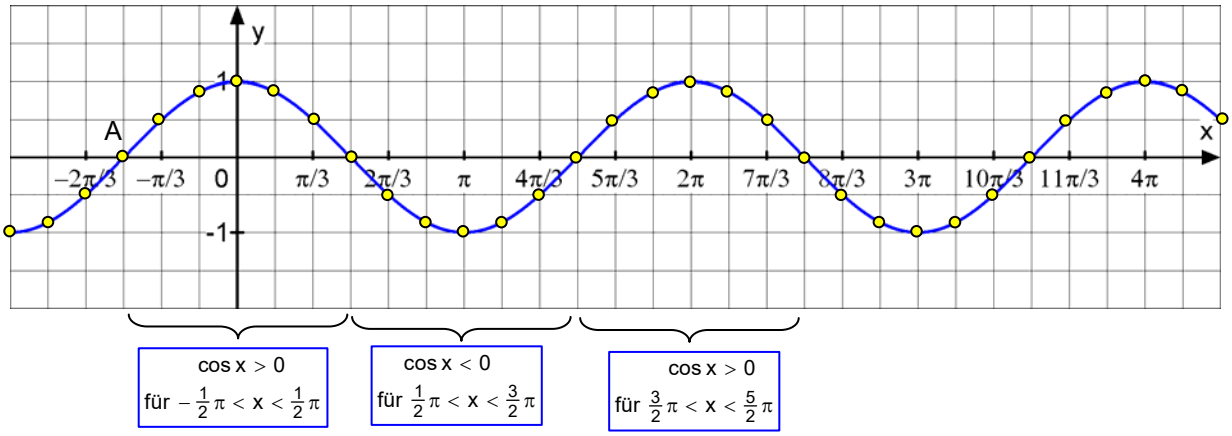
Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{4}{3}\pi$ bzw. 240°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach unten (B*).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{3}{2}\pi$ bzw.270°) und um 1 nach unten (Tiefpunkt).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{5}{3}\pi$ bzw. 300°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach unten (B+).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{11}{6}\pi$ bzw. 330°) und um 0,5 nach unten (A+).

Die graphische Darstellung der Funktion $f(x) = \cos x$ übernehme ich aus 16012 / Seite 30:



Auch hier gibt es ein Periodenintervall der Länge 2π, das man zum Beispiel so angeben kann: $[0\,;2\pi]$ Die eingetragenen Punkte (Kosinuswerte) kann man der Tabelle von Seite 4 entnehmen und dann auf die ganze Kurve entsprechend übertragen, denn die Kosinuskurve entsteht aus der Sinuskurve durch eine Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ nach links. Die Grundwelle der Sinuskurve, die im Ursprung beginnt und die Länge 2π hat, beginnt nach der Verschiebung in A,

Eine punktweise Zeichnung erstellt man also wie zuvor bei der Sinuskurve, nur eben mit anderem Startpunkt, etwa bei A.

Auf die **Tangensfunktion** gehe ich in diesem Text kurz auf Seite 10 ein. Weitere Hinweise im Text 16012 ab Seite 30.

2 Symmetrie, Nullstellen und Extrempunkte

2.1 Die Kurve y = sin x / Die Funktion f(x) = sin x

(1) Bedeutung der Perioden-Eigenschaft

Die Sinuskurve hat die Periode 2π, weil sich (egal wo man beginnt) nach dieser Strecke alles wiederholt. Das ist mathematisch unsauber formuliert. Machen wir es genauer:

Im Schaubild unten ist der Punkt A eingezeichnet. Er hat die Koordinaten $A(x_A \mid 0{,}7)$.
Verschieben wir ihn um 2π nach rechts (roter Pfeil), dann kommen wir zu $A'(x_A + 2\pi \mid 0{,}7)$.
Verschieben wir $B(x_B \mid -0{,}7)$ um 2π in x-Richtung, entsteht $B'(x_B + 2\pi \mid -0{,}7)$.
$C(x_C \mid 0{,}3)$ kommt durch die Verschiebung um 2π nach links zum Punkt $C'(x_C - 2\pi \mid 0.3)$.

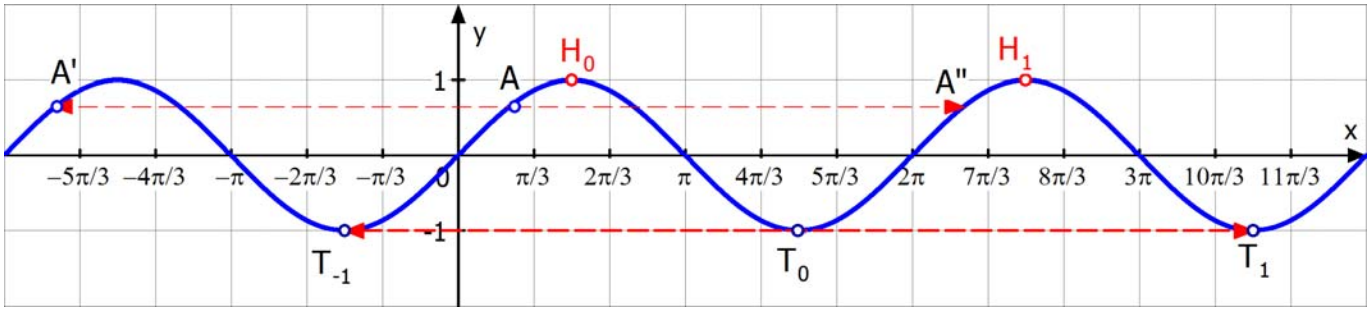
Die um die Periode 2π verschobenen Punkte haben stets die gleichen y-Koordinaten wie ihre Urbilder. Wie diese y-Koordinaten die Funktionswerte, also die Sinuswerte sind, kann man diesen Sachverhalt auch so darstellen:

Für A': $\sin(x_A + 2\pi) = \sin(x_A) = 0{,}7$
Für B': $\sin(x_B + 2\pi) = \sin(x_B) = -0{,}7$
Für C': $\sin(x_C - 2\pi) = \sin(x_C) = 0{,}3$

LERNEN !

Diese Zusammenhänge gelten für alle Punkte. Wenn man mehrfach um die Periodenlänge 2π verschiebt, also um $z \cdot 2\pi$ ($z \in \mathbb{Z}$), dann entsteht folgende Beziehung:

$$\sin(x + z \cdot 2\pi) = \sin(x)$$



Dieses Wissen hilft, Eigenschaften von einem Punkt auf andere zu übertragen. Kennt man beispielsweise den Hochpunkt $H(\frac{1}{2}\pi \mid 1)$, dann kann man angeben, wo die anderen Hochpunkte liegen: $H_z(\frac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi \mid 1)$ (Siehe auch Abb. Seite 8)

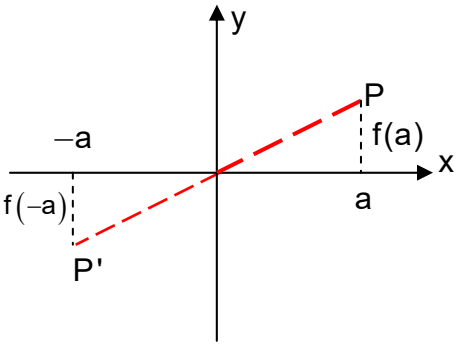
(2) Das Symmetrie-Verhalten

Die Kurve y = sinx ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Das besagt, dass die Sinuskurve bei Spiegelung am Ursprung auf sich selbst abgebildet wird. Die Darstellung zeigt den mathematischen Zusammenhang:

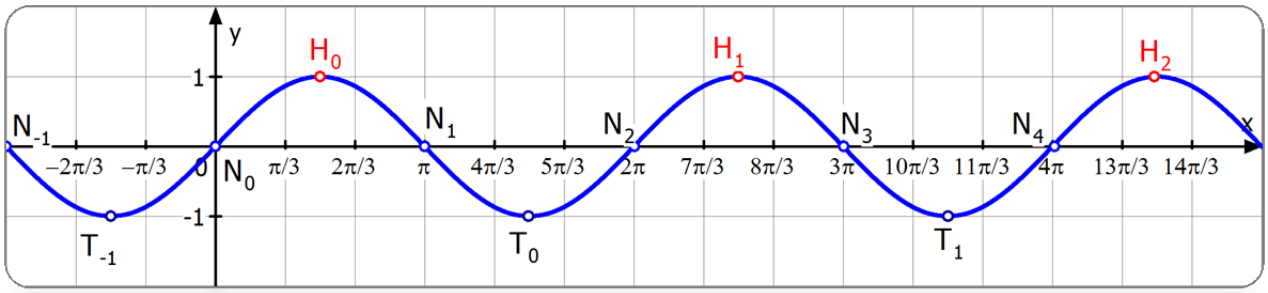
$P(a \mid f(a))$ wird an O gespiegelt und geht über in $P'(-a \mid f(-a))$.

Wenn also für alle a gilt $f(-a) = -f(a)$, dann liegt Punktsymmetrie vor. Hier heißt dies: $\sin(-x) = -\sin(x)$



Es gibt unzählige weitere Symmetrien für diese Kurve!

(3) Die Nullstellen der Sinusfunktion



Aussage für die Funktion *(algebraische Eigenschaften)*:

Im Grundintervall $[0\,;2\pi]$ gibt es drei Nullstellen: $x_0 = 0,\ x_1 = \pi,\ x_2 = 2\pi$.

Im Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$, gibt es unendlich viele Nullstellen: $x_z = z \cdot \pi\ \ (z \in \mathbb{Z})$.

Aussage für das Schaubild K *(geometrische Eigenschaften):*

K hat unendlich viele Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_z(z \cdot \pi \,|\, 0),\ z \in \mathbb{Z}$.

Diese Schnittpunkte mit der x-Achse sind auch die **Wendepunkte** der Kurve. Dort ändert sich das Krümmungsverhalten von Linkskrümmung nach Rechtskrümmung bzw. umgekehrt.

(4) Die Extremwerte der Sinusfunktion / Extrempunkte des Schaubilds

Aussagen für die Funktion: *(algebraische Eigenschaften)*

Im Grundintervall $[0\,;2\pi]$ gibt es eine Maximumstelle: $x_0 = \frac{1}{2}\pi$. Der Maximalwert ist 1.

Im Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele **Maximumstellen**:

$$x_{max,z} = \tfrac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \left(2z + \tfrac{1}{2}\right)\pi = \frac{4z+1}{2}\pi,\ \ z \in \mathbb{Z}.$$ Der Maximalwert ist 1.

Im Grundintervall $[0\,;2\pi]$ gibt es eine Minimumstelle: $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Der Minimalwert ist -1.

Im Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele **Minimumstellen**:

$$x_{Min,z} = \tfrac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \left(2z + \tfrac{3}{2}\right)\pi = \frac{4z+3}{2}\pi,\ \ z \in \mathbb{Z}.$$ Der Minimalwert ist -1.

Folgerung: Die **Wertmenge** der Funktion ist $\mathbf{W} = [-1\,;1]$

Aussage für das Schaubild K: *(geometrische Eigenschaften)*

K hat unendlich viele **Hochpunkte**: $H_z\left(\frac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi \,|\, 1\right) = \left(\frac{4z+1}{2} \,|\, 1\right),\ z \in \mathbb{Z}$.

K hat unendlich viele **Tiefpunkte**: $T_z\left(\frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \,|\, -1\right) = \left(\frac{4z+3}{2} \,|\, -1\right),\ z \in \mathbb{Z}$.

Hinweise:

(1) ***Man sollte streng zwischen den Eigenschaften der Funktion und denen des Schaubilds unterscheiden.***

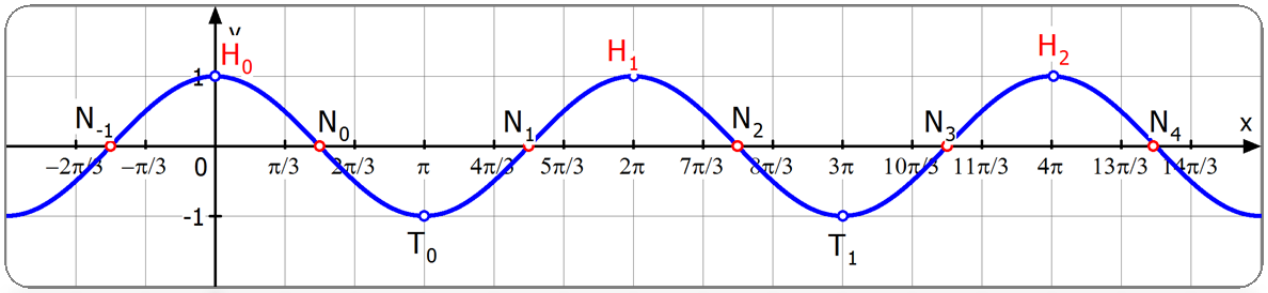
Aussagen wie „Nullstelle des Schaubilds“ oder „Hochpunkt der Funktion“ ist unzulässig.

Die Nullstelle ist eine Zahl, nämlich die x-Koordinate eines Schnittpunkts des Schaubilds mit der x-Achse. Eine Funktion kann die x-Achse nicht schneiden.

(2) ***In der Oberstufe*** *muss man in der Lage sein, die Formeln für Nullstellen und Extremstellen bzw. Extrempunkte (also mit z) anzugeben!*

2.2 Die Kurve y = cos x / Die Funktion f(x) = cos x

kurz zusammengefasst.

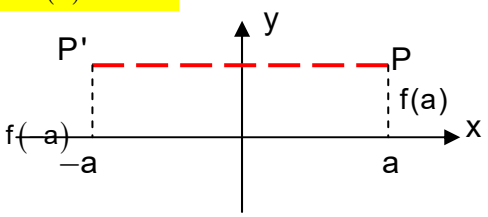


Die Kosinuskurve entsteht aus der Sinuskurve durch eine Verschiebung (siehe Abschnitt 3).
Daher kann man viele Eigenschaften der Sinuskurve auf die Kosinuskurve übertragen.

(1) Bedeutung der Perioden-Eigenschaft

Die Kosinuskurve hat die Periode 2π: $\cos(x + z \cdot 2\pi) = \cos(x), \quad z \in \mathbb{Z}$

(2) Die Kosinuskurve ist symmetrisch zur y-Achse.



Es gilt daher für alle x: $\cos(-x) = \cos(x)$

(3) Nullstellen der Kosinusfunktion

Im Grundintervall $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ gibt es zwei Nullstellen: $x_o = \frac{1}{2}\pi$, und $x_1 = \frac{3}{2}\pi$.

Im maximalen Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele: $x_{N,z} = \frac{1}{2}\pi + z \cdot \pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

Schnittpunkte von K mit der x-Achse:

Im Grundintervall $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ gibt es zwei: $N_O\left(\frac{1}{2}\pi \mid 0\right)$ und $N_1\left(\frac{3}{3}\pi \mid 0\right)$.

In $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele: $N_z\left(\frac{1}{2}\pi + z \cdot \pi \mid 0\right) = \left(\left(z + \frac{1}{2}\right)\pi \mid 0\right) = \left(\frac{2z+1}{2}\pi \mid 0\right), \; z \in \mathbb{Z}$.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind auch hier zugleich **Wendepunkte**:

(4) Minima und Maxima der Kosinusfunktion

Algebraischer Sachverhalt:

In $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ hat die Kosinusfunktion zwei **Maximumstellen**: 0 und 2π, der Maximalwert ist 1.
In $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Maximumstellen: $x_{Max,z} = z \cdot 2\pi$, $z \in \mathbb{Z}$.

In $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ hat die Kosinusfunktion eine **Minimumstelle** $x_{Min,z} = \pi$, der Minimalwert ist -1.
In $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Minimumstellen: $x_{Min,z} = (2z+1) \cdot \pi, \; z \in \mathbb{Z}$

Folgerung: Der **Wertebereich** (Wertmenge) von $f(x) = \cos(x)$ ist $\mathbf{W} = [-1\,;1]$.

Geometrischer Sachverhalt:

In $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ hat die Kosinuskurve die **Hochpunkte** $H_1(0 \mid 1)$ und $H_2(2\pi \mid 1)$.
In $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Hochpunkte. $H_z(z \cdot 2\pi \mid 1), \; z \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: $z \cdot 2\pi = 2z \cdot \pi$ sind alle geradzahligen Vielfachen von π.

In $\mathbf{D} = [0\,;2\pi]$ hat die Kosinuskurve den **Tiefpunkt** $T(\pi \mid -1)$.
In $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Tiefpunkte: $T_z(\pi + z \cdot 2\pi \mid -1) = ((2z+1)\pi \mid -1)$
Hinweis: $(2z+1) \cdot \pi$ sind alle ungeradzahligen Vielfachen von π.